ALGEBRE LINEAIRE ET GEOMETRIQUE
2e QUADRIMESTRE - Samuel Fiorini

CH8 : DETERMINANTS

8.1 PERMUTATIONS

Def 8.1 Groupe (rappel) Un groupe est un ensemble G muni d'une opération interne $\cdot : G \times G \to G$ qui satisfait les propriétés suivantes :

① $\forall g, h, k \in G$, $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ (associativité)

② $\exists$ un neutre $e \in G$ tq $e \cdot g = g = g \cdot e$ $\forall g \in G$ ($\exists$ d'éléments neutre)

③ $\forall g \in G$, $\exists g^{-1} \in G$ tq $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$ ($\exists$ des inverse)

Def 8.2 Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans lui même

Def 8.3 Soit E un ensemble $\neq \phi$. L'ensemble $\mathrm{Sym}(E)$ des permutations de E, muni de l'opération de composition $\circ$, forme un groupe appelé groupe symétrique sur E. Le neutre de $\mathrm{Sym}(E)$ est la permutation identique (ou identité) id.

⊙ Si $E = \{1, 2, \dots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}_0$, on note $\mathrm{Sym}(n)$ ou $\mathfrak{S}_n$ (S gothique) le groupe symétrique de degré n, ou sur n lettres.

⊙ Rappel : composition des permutations α et β d'un ensemble E est définit comme $\alpha \circ \beta(x) = \alpha(\beta(x))$ et se lit "β rond α". On peut aussi la noter $\alpha\beta$

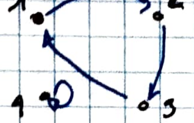
⊙ Notations : il existe plusieurs notation pour $\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$

① Tableau (ou matrice) $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{bmatrix}$.

où l'ordre des colonnes n'est pas important

② Diagramme prenons un exemple :

α : $1 \mapsto 2$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 1$
$4 \mapsto 4$



③ Décomposition en cycles :

prenons le même exemple : $\alpha = (1,2,3)(4)$

(4) est un point fixe, i.e. il est envoyé sur lui même.

↳ l'ordre des cycles n'a pas d'importance (si indé)

↳ on peut permuter cycliquement chaque cycle :

$(1,2,3) = (2,3,1) = (3,1,2)$

↳ La longueur d'un cycle est son # d'élément

Pro 8.6 | Le # de permutation de Sym (n) est $n!$

DEMO | Soit $\sigma \in Sym(n)$. Il y a n choix pour $\sigma(1)$, $n-1$ choix pour $\sigma(2)$, ... Au total, il y a bien $n(n-1).(n-2)... = n!$ choix.

⊙ Calcul avec les décompositions en cycles

⚠ si une lettre est presentes dans 2 cycles, ce n'est pas une décomposition en cycle

→ ex : soit $\alpha = (2,4,7,8)(1,3)$ et $\beta = (5,2,6,10)$

Alors $\alpha\beta = \alpha \circ \beta = (1,3)(2,6,10,5,4,7,8)$

⚠ non commutatif !

④ Vecteurs des images / chain de nombres

On peut représenter $\sigma \in Sym(n)$ comme $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), ...)$

ou encore $\sigma(1)\,\sigma(2)\,\sigma(3) \dots \sigma(n)$

⑤ Matrice de permutation

$P = P_\sigma = (p_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ tq

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases} \iff p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)}$$

ex : $P_\sigma = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \end{array}$ $\sigma(j)$

→ $P_\alpha P_\beta = P_{\alpha\beta}$ et $P_{\alpha^{-1}} = (P_\alpha)^{-1} = (P_\alpha)^T$

Def 8.9 | Pour $\sigma \in Sym(n)$, l'ordre de σ est le plus petit entier $k \geq 1$ tq $\sigma^k = id$

ex : • ordre d'une transposition est 2

• ordre de $\tau = \underbrace{(2,3)}_{2}\underbrace{(4,8,7,1)}_{4}\underbrace{(5,6,9)}_{3} = PPCM(2,3,4) = 12$

Def 8.11 | Pour $\alpha, \beta \in Sym(E)$, la conjugée de α par β est :

$\alpha^\beta = \beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} = \beta\alpha\beta^{-1}$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & y \arrow[d, "\beta"] \\ \beta(x) \arrow[r, "\alpha^\beta"'] & \beta(y) \end{tikzcd}$$

Th 8.12 Toute permutation $\sigma \in Sym(n)$ s'écrit comme un produit de transposition

DEMO Soit $\sigma = (a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_k)$. Une factorisation possible est
$(a_1, a_2, .., a_{k-1}, a_n) = (a_1, a_2)(...)(a_{k-2}, a_{k-1})(a_{k-1}, a_k)$

8.2 SIGNE D'UNE PERMUTATION

Def 8.13 Soit $\sigma \in Sym(n)$.

① σ est pair si # cycle de longueur pair est pair

② σ est impair si # cycle de longueur pair est impair

Le signe de σ est défini par

$$sgn(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire} \end{cases}$$

Remarque : $sgn : Sym(n) \to \{-1; +1\}$ est un homomorphisme de groupe

Th. 8.14 $\forall \sigma, \tau \in Sym(n)$, $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$

DEMO ① Supposons que $sgn(\alpha\beta) = sgn(\alpha) \cdot sgn(\beta)$ est vrai si β est une transposition.

Ecrivons $\tau \overset{8.12}{=} \tau_1 \tau_2 .. \tau_k$ où chaque τ_i est une transposition.

On a alors $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma \underbrace{\tau_1 \tau_2 .. \tau_k}_{\text{transpositions}})$

$= sgn(\sigma \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{k-1}) \, sgn(\tau_k)$ par hypothèse

$= ... = sgn(\sigma) sgn(\tau_1) ... sgn(\tau_k)$

$= sgn(\sigma) \, sgn(\underbrace{\tau_1 \tau_2 .. \tau_k}_{=\tau})$ par hypothèse

$= sgn(\sigma) sgn(\tau)$

② Supposons $\tau = (x, y)$ avec $x \neq y$

<u>CAS 1</u> : Le cycle (x,y) intersecte 2 cycles $\neq$ σ

Posons $\sigma = (\overset{}{\underset{x}{a_1}}, a_2, .., a_k)(\underset{y}{b_1}, .., b_\ell)\sigma'$

$\Rightarrow \sigma\tau = \sigma \cdot (a_1, b_1) = (\underbrace{a_1, b_2, b_3, .., b_\ell, b_1, a_2, .., a_k}_{\text{longueur } k+\ell})\sigma'$

On voit alors que $sgn(\sigma\tau) = -sgn(\sigma)$

<u>CAS 2</u> : Le cycle (x,y) intersecte 1 ! cycle de σ

$\Rightarrow \sigma\tau = (\overset{x}{a_1}, .., \overset{y}{a_k}, a_{k+1}, .., a_{k+\ell})\sigma' (\overset{x}{a_1}, \overset{y}{a_k}) = (a_1, a_{k+1}, .., a_{k+\ell})(a_k, a_2, .., a_{k-1})$

On obtient de nouveau $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$

Co 8.14

① Si $\sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_k$, où σ_i est une transposition $\forall i$, alors $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$

② $\mathrm{Alt}(n) := \{\sigma \in \mathrm{Sym}(n) \mid \mathrm{sgn}\,\sigma = +1\}$ est un sous groupe, comportant $\frac{n!}{2}$ permutation

8.3 LONGUEURS, AIRES, VOLUMES ORIENTÉS

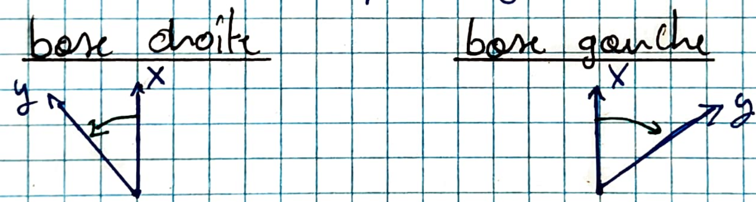
8.3.1 Origine du déterminant

→ Déterminant de $(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ = volume orienté d'un parallélépipède de dimension n.

→ orienter un volume permet de "simplifier" la fonction volume car un volume est tjs positif (// valeur absolue) et donc non-linéaire.

8.3.2 Intuition géométrique dans le plan

→ Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ non co-linéaire. Alors $\{x, y\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\{x, y\}$ est une base droite si :



- On peut maintenant définir l'aire orientée :

$$A^{or}(x,y) = \begin{cases} +A(x,y) & \text{si } \{x,y\} \text{ est une base droite} \\ -A(x,y) & \text{si } \{x,y\} \text{ est une base gauche} \\ 0 & \text{si n'est pas une base} \end{cases}$$

- $A^{or}(\cdot,\cdot)$ satisfait les propriétés suivantes : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

① $A^{or}(x+y, z) = A^{or}(x,y) + A^{or}(z,y)$ et
$A^{or}(x, y+z) = A^{or}(x,y) + A^{or}(x,z)$

② $A^{or}(x, \lambda y) = A^{or}(\lambda x, y) = \lambda A^{or}(x,y)$

} bilinéarité

③ $A^{or}(x,x) = 0$ } Alterné

→ A^{or} est une forme bilinéaire alternée
↳ prend des valeurs dans $\mathbb{R}$

⊙ Si $E = \{e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $A^{or}(e_1, e_2) = 1$

De plus, $A^{or}(y,x) = A^{or}(x,y)$ (i.e. A^{or} est antisymétrique)

⊙ Soit $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$. On peut alors écrire :

$$A^{or}(x,y) = A^{or}(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2)$$

$$= x_1 y_1 \underbrace{A^{or}(e_1, e_1)}_{=0} + x_1 y_2 \underbrace{A^{or}(e_1, e_2)}_{=1} + x_2 y_1 \underbrace{A^{or}(e_2, e_1)}_{=-1} + \underbrace{x_2 y_2 A^{or}(e_2, e_2)}_{0}$$

$$= x_1 y_2 - x_2 y_1$$

→ L'aire orienté est aussi le déterminant de la matrice

$$A^{or}(x,y) = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

8.4 EXISTENCE ET UNICITÉ DU DÉTERMINANT

- Soit V un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ (exemple : $V = \mathbb{K}^n$).
- Considérons de $V^n \to \mathbb{K}$, avec $V^n := V \times V \times \ldots \times V \cong \mathbb{K}^{n^2}$

Def 8.15 Une forme multilinéaire (en fait n-linéaire) sur V est une fonction $f : V^n \to \mathbb{K} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto f(a_1, \ldots, a_n)$ si

① f est linéaire en chacun de ses arguments

② $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ si $a_i = a_j$ pour $i \neq j$.

Donc, f est antisymétrique, ie si on échange a_i avec a_j, la forme change de signe.

Le 8.16 $\forall \sigma \in \mathrm{Sym}(n)$, $\forall a_1, \ldots, a_n \in V$:

$$f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, f(a_1, \ldots, a_n)$$

demo ?

Pro 8.17 Soit V un E.V. sur $\mathbb{K}$ et $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V.

$\exists!$ forme multilinéaire alternée $f : V^n \to \mathbb{R}$ tq $\underbrace{f(e_1, \ldots, e_n) = 1}_{\text{normalisation}}$

DEMO ① Unicité : supposons que f existe :

Calculons $f(a_1, \ldots, a_n)$, avec $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ où $a_{ij} \in \mathbb{K}$

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} e_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} e_j\right)$$ utilisons un indice ≠ pour chaque Σ

$$= f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} e_{j_n}\right)$$

$$= \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n} f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n})$$ linéarité

Or, $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$ si les indices sont égaux. Il faut donc éliminer tout les termes avec des indices égaux. Il nous reste alors la solution triviale d'indice $(1, 2, \dots, n)$ et toutes ses permutation, i.e. $\mathrm{Sym}(n)$. On trouve alors

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \cdot \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{f(e_1, \dots, e_n)}_{=1}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

② Existence Considerons la forme $\det : V^n \to \mathbb{K}$

$$\det(a_1, \dots, a_n) := \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

On a alors que :

$\boxed{2.1}$ $\det : V^n \to \mathbb{K}$ est multilinéaire car chaque terme est multilinéaire, ainsi que leur somme et leur multiplication scalaire

$\boxed{2.2}$ det est alternée, ie si $a_i = a_j$ pour $i \neq j$, $\det = 0$.

Pour le montrer prenons $\beta = (i,j)$. Alors $\tau = \alpha$ et $\tau = \alpha\beta$ vont être de signe opposé. On calcul :

$$\overbrace{\mathrm{sgn}(\alpha\beta)}^{=-1} a_{1\alpha\beta(1)} \cdots a_{i\alpha\beta(i)} \cdots a_{j\alpha\beta(j)} \cdots a_{n\alpha\beta(n)}$$

$$= - a_{1\alpha(1)} \cdots \underbrace{a_{i\alpha(j)}}_{= a_{j\alpha(j)}} \cdots \underbrace{a_{j\alpha(i)}}_{= a_{i\alpha(i)}} \cdots a_{n\alpha(n)} \quad \text{car } a_i = a_j$$

$$= - a_{1\alpha(1)} \cdots a_{i\alpha(i)} \cdots a_{j\alpha(j)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

$$= - \mathrm{sgn}(\alpha) a_{1\alpha(1)} \cdots a_{i\alpha(i)} \cdots a_{j\alpha(j)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

$\boxed{2.3}$ $\det(e_1, \dots, e_n) = \sum \mathrm{sgn}(\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \delta_{2\sigma(2)} \cdots \delta_{n\sigma(n)}$

$$= \mathrm{sgn}(\mathrm{id}) \cdot 1 = 1$$

Def. 8.18 **Déterminant d'un matrice.** On définit le déterminant d'une matrice carrée $a = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{K})$ par

$$\det(a) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

De manière équivalente, $\det(a) = \det(a_1, \dots, a_n)$ où chaque a_i correspond à la i-ligne de la matrice $a = (a_{ij})$

8.5 PROPRIÉTÉS ET CALCUL PAR LA MÉTHODE DE GAUSS

pro 8.21 Soient $a=(a_{ij})$, $b=(b_{ij})$, $c=(c_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

① $\det(a) = \det(a^T)$

② si $a=b=c$ sauf pour la k-ième ligne pour lesquels $c_{kj} = a_{kj} + b_{kj}$ $\forall j=1,\dots,n$, alors $\det(c) = \det(a) = \det(b)$

③ soit $(b_{ij}) = (a_{ij})$ sauf pour une ligne multipliée par un scalaire λ, alors $\det(b) = \lambda \det(a)$

④ si b est obtenue en permutant 2 lignes distinctes de a, alors $\det(b) = -\det(a)$

⑤ si a possède 2 lignes égales, alors $\det(a) = 0$

⑥ Le déterminant de a ne change pas si je remplace une ligne par cette ligne $\pm$ un multiple d'une autre ligne.

⑦ Si $a = ij$ est triangulaire ie $a_{ij}=0$ si $i>j$, alors $\det(a) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

DEMO

① $\forall \sigma \in Sym(n)$, on a $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$ et $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$. Donc

$$\det(a) = \sum_{\sigma\in Sym(n)} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma\in Sym(n)} sgn(\sigma)\, a_{\sigma^{-1}(1)1}\cdots a_{\sigma^{-1}(n)n} \quad \text{changement de variable}$$

$$\sigma^{-1}=\tau \rightsquigarrow \quad = \sum_{\tau^{-1}\in Sym(n)} \underbrace{sgn(\tau^{-1})}_{=sgn\,\tau}\, a_{\tau(1)1}\cdots a_{\tau(n)n} = \det(a^T)$$

En effet : $1 = sgn(id) = sgn(\tau\tau^{-1}) = sgn(\tau)\,sgn(\tau^{-1})$

$\Rightarrow sgn(\tau) = sgn(\tau^{-1})$

② ③ ④ ⑤ découle des propriétés que $\det : V^n \to \mathbb{K}$ est une forme multilinéaire alternée

⑥ Soit $a \longrightarrow b$ tq $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $(i \neq j)$

$$\det(b) = \det(a_1,\dots,a_{i-1}, a_i+\lambda a_j, a_{i+1},\dots,a_j,\dots,a_n)$$

$$= \det(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n) + \lambda \underbrace{\det(a_1,\dots,a_j,\dots,a_j,\dots,a_n)}_{=0}$$

$$= \det(a) + \lambda \cdot 0 = \det(a)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in S_{gm}(n)} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}_{\neq 0 \Rightarrow \sigma(1)=1, \dots, \sigma(n)=n}$$

Donc $\sigma = id \Rightarrow \det(a) = (+1)\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

8.6 FORMULE DE BINET

On va démontrer que $\det(ab) = \det(a) \det(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{K}^{n \times n}$

- Rappel : Si $f : V^n \to \mathbb{K}^n$ est → multilinéaire
  → alternée

Alors $\forall\, a_1, \dots, a_n \in V$:

$$f(a_1, \dots, a_n) = \underbrace{\det(a_1, \dots, a_n)}_{\det(a)} \cdot \underbrace{f(\overbrace{e_1, \dots, e_n}^{\text{base fixée}})}_{\in \mathbb{K}}$$

où a = matrice dont les lignes/colonnes donnent les coordonnées de $a_1, \dots, a_n$ dans E.

Th 8.24 Formule de Binet : $\forall a, b \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

$$\det(a\, b) = \det(a) \cdot \det(b)$$

DEMO

Soit $V \cong \mathbb{K}^n$ et $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V.

① $\forall\, C \in \mathrm{End}(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$ opérateur linéaire et $\forall\, f : V^n \to \mathbb{K}$ forme multilinéaire alternée, on peut trouver $f_C : V^n \to \mathbb{K} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto f(C(a_1), \dots, C(a_n))$ est également multilinéaire alternée.

② Soient A, B les opérateurs linéaires correspondants aux matrices a, b : $\forall j$: $a_j = A(e_j)$ et $b_j = B(e_j)$

(i) $f_B(a_1, \dots, a_n) = \det(a) \cdot f_B(e_1, \dots, e_n)$
$= \det(a)\, f(B(e_1), \dots, B(e_n))$
$= \det(a)\, f(b_1, \dots, b_n) = \det(a) \det(b) \cdot f(e_1, \dots, e_n)$

(ii) $f_B(a_1, \dots, a_n) = f(B(A(e_1)), \dots, B(A(e_n)))$
$= f((B \circ A)(e_1), \dots, (B \circ A)(e_n))$
$= \det(b a) \cdot f(e_1, \dots, e_n)$

③ Alors si $f(e_1, \dots, e_n) \neq 0$, on a $\det(b \cdot a) = \det(a) \cdot \det(b)$

→ On voit alors que si $a \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ est inversible

$$\det(a a^{-1}) = \det(a)\det(a^{-1})$$
$$= \det(I) = 1.1\ldots1 = 1$$

$$\Rightarrow \det(a) \neq 0 \text{ et } \underline{\det(a^{-1})} = \frac{1}{\det(a)} = \underline{(\det(a))^{-1}}$$

Pro 8.26 Si $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible, alors $\det(a) \neq 0$ et

$$\det(a^{-1}) = \frac{1}{\det(a)} = (\det(a))^{-1}$$

DEMO voir dessus

⊙ Rappel : si $A \in End(V)$, et si E, F sont deux bases de V.

$$[A]_{F,F} = \underbrace{[Id]_{F,E}}_{b^{-1}} \underbrace{[A]_{E,E}}_{a} \underbrace{[Id]_{E,F}}_{b}$$
$$= b^{-1} a b$$

$$\det([A]_{F,F}) = \det(b^{-1} a b) = \cancel{\det(b^{-1})} \det(a) \cancel{\det b}$$
$$= \det([A]_{E,E})$$

def 8.27 Si $A \in End(V)$, où V est un E.V. finidimentionnel, on pose

$$\det(A) := \det([A]_{E,E}) \quad \text{(indépendant de la base).}$$

où E est une base quelconque de V.

Th. 8.28 Un opérateur linéaire $A \in End(V)$ est inversible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

DEMO ($\Rightarrow$) Supposons que A est inversible. Soit a la matrice de A dans une base de V quelconque. Par (8.26),

$$A \text{ inversible} \Rightarrow a \text{ inversible} \quad (a = [A]_{E,E})$$
$$\Rightarrow \det(a) \neq 0 \Rightarrow \det(A) \neq 0$$

($\Leftarrow$) Supposons que A n'est pas inversible (contraposée)

$\Rightarrow \exists f_1 \in V \setminus \{0\} : A(f_1) = 0$. car pas injective

Complétons $\{f_1\}$ en une base de V $F := \{f_1\} \cup \{f_2, \ldots, f_n\}$

$$[A]_{F,F} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \Rightarrow \det([A]_{F,F}) = 0$$
$$\Rightarrow \det(A) = 0$$

$\boxed{\cancel{A}}$

8.7 COFACTEURS

Les cofacteurs d'une matrice a de taille $n \times n$ sont, au signe près, les déterminants des matrices $(n-1) \times (n-1)$ obtenue à partir de a en supprimant une ligne et une colonne.

On parle de développement du det. suivant une ligne.

Def. 8.29 Cofacteur. Soit $a \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. Le cofacteur du coefficient a_{ij} est :

$$A_i^j := (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ & & & & & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & & & & a_{i+1,n} \\ a_{n,n} & & & & & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Th. 8.30 (règle de Laplace) : Soit $a \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$. $\forall$ indice i d'une ligne fixé, on a : $\det(a) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_i^k$

$\forall j$ (colonne fixé) : $\det(a) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_k^j$

DEMO

Posons $i = n$. Nous avons

$$\det(a) = \sum_{\sigma \in Sym(n)} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad \text{définition}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in Sym(n) \\ \sigma(n) = j}} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots \underbrace{a_{n\sigma(n)}}_{= nj}$$

séparons les σ en type tq $\sigma(n) = j$ $\forall j = 1, \dots, n$.

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \sum_{\substack{\sigma \in Sym(n) \\ \sigma(n) = j}} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n-1\,\sigma(n-1)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots\, 0 & 1 & 0 & \cdots\, 0 \end{vmatrix}$$

échange de ligne et colone de proche en proche

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1,j} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,j} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ 1 & 0 & & \end{vmatrix}$$

$$= \sum a_{nj} (-1)^{j\cancel{-1}-n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,j} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n-1,j} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

obligé de tjs prendre le 1 donc on "oublie" la 1e colone et 1e ligne

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} (-1)^{j+n} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} A_n^j$$

8.8. MATRICE ADJOINTE

Def 8.32 Soit $a \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$, on définit sa matrice adjointe la transposée de la matrice des cofacteurs de a. On note $adj(a)$. Autrement dit, $(adj\, a)_{ij} = A_j^i \quad \forall i,j = 1, \dots, n$

Th. 8.33 $\forall a \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$, on a $a\, adj(a) = (\det a) I$
De plus, si a est inversible, alors $a^{-1} = \frac{1}{\det(a)} adj\, a$

DEMO Calculons le produit de a et $adj\, a$:

$(a\, adj\, a)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (adj\, a)_{kj}$ formule du produit des matrice

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_j^i$ définition

→ si $j = i$: $\det a$ Laplace

? → si $j \neq i$: 0

↳ $(a\, adj\, a) = (\det a) \delta_{ij}$

8.9 REGLE DE CRAMER

Th. 8.35 Soit $A = (a_{ij}) \in Mat_{n,n}(\mathbb{K})$ et $(b_i) \in Mat_{n,1}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^n$ un vecteur colonne et $x = (x_i) \in \mathbb{K}^n$ un vecteur colonne d'inconnue. Considérons le système $Ax = b$.
Ce système possède une solution unique $\Leftrightarrow \det a \neq 0$
Dans ce cas, $x = A^{-1} b$ et $x_j = \frac{\det A^j}{\det A} \quad \forall j = 1, \dots, n$
où A^j est définie comme la matrice obtenue apd A en remplaçant la j-ième colonne par b

DEMO

$$\det A^j = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

remplaçons les b_i par Ax :

$$\det A^j = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,k} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= x_j \det A$$

On obtient donc $x_j = \dfrac{\det A^j}{\det A}$

CH9 VECTEURS PROPRES ET DIAGONALISATION

- Pour tout le chapitre,
  - $\mathbb{K}$ sera un corps commutatif
  - V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
  - $A \in \mathrm{End}(V)$ un opérateur linéaire sur V
  - ie : $A : V \to V$ application linéaire
- Dans ce chapitre, nous voulons une base E telle que $[A]_{E,E} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$ soit diagonale. ⚠ Elle n'existe pas toujours

9.1 VECTEURS, VALEURS ET SOUS-ESPACES PROPRES

Def Un vecteur v est un vecteur propre si $A(v) = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$

$\Leftrightarrow$ $\{v, A(v)\}$ n'est pas une partie libre

$\Leftrightarrow$ $v = 0$ ou $v \neq 0$, et $A(v)$ est la droite engendrée par v

$\Leftrightarrow$ $v = 0$ ou $v \neq 0$, et A agit comme une homothétie sur $\langle v \rangle$

→ remarque : 0 est tjs un vecteur propre. En effet,

$A(0) = 0 = \lambda . 0$

Def $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists v \in V, v \neq 0$ tq

$A(v) = \lambda v$